අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය – 2023

සංයුක්ත ගණිතය

≈ ත්‍රිකෝණමිතිය ≈

Manoj Solangaarachchi
_(B. Sc.)_

---

(01) (i) $0 < x < \pi$ සඳහා $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$ සමීකරණය සපුරනු ලබන x හි අගයයන් සොයන්න.

(ii) $f(x) = 3 + \cos x,\ g(x) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right),\ h(x) = 3\sin 2x$ යයි ගනිමු.

(a) f, g, h එක් එක් ශ්‍රිතයේ ආවර්තය සොයන්න.

(b) $-2\pi \leq x \leq 2$ ප්‍රාන්තරය මත f, g හා h ශ්‍රිතවල ප්‍රස්ථාරයන්හි දළ සටහනක් අඳින්න.

---

(02) (i) (a) $\dfrac{\sin 3A}{\cos A} + \dfrac{\cos 3A}{\sin A} = \cot A - \tan A$

(b) $\tan(45° + A) - \tan(45° - A) = 2\tan 2A$ බව පෙන්වන්න.

(ii) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය ප්‍රකාශකර සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B} = 45°, \hat{C} = 30°$ සහ $AB = 10\ cm$ ලෙස දීඇත. AC සහ CB හි දිග සොයා ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය තීරණය කරන්න.

---

(03) $0 < C < \dfrac{\pi}{2}$ නම්, $\dfrac{1 + \sin 2C - \cos 2C}{1 + \sin 2C + \cos 2C} = \tan C$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\tan\dfrac{\pi}{8}$ හි අගය ලබාගන්න.

---

(04) (i) සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ කෙටිතම පාදයෙහි දිග x ද, එම පාදයට සම්මුඛ කෝණය α ද වේ. අනෙක් පාද දෙකෙහි දිගවල එකතුව λx නම්, $\lambda\sin\alpha - \cos\alpha = 1$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\cos x + \cos y = 1$ සහ $\sec x + \sec y = 4$ නම්, $\cos x\ \cos y = \dfrac{1}{4}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\cos x + \cos y = 1$ සහ $\sec x + \sec y = 4$ සපුරාලන $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ ද වන පරිදි වූ x හි හා y හි අගයන් සොයන්න.

---

(05) (i) a හා b යනු තාත්ත්වික නියත වේ. $a\cos x + b\sin x$ යන්න a හා b ඇසුරෙන් R සහ α දෙමින් $R\sin(x+\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) $c^2 \leq a^2 + b^2$ නම්, a, b හා c තාත්ත්වික නියත වූ $a\cos x + b\sin x = c$ සමීකරණයට x සඳහා තාත්ත්වික විසඳුම් තිබෙන බව අපෝහනය කරන්න.

$2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos x$ විසඳන්න.

(iii) $|\cos^2 x + 4\sin x\cos x - 3\sin^2 x + 1| \leq 2\sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.

---

(06) (i) $\sec\theta = \cos\theta + \sin\theta$ නම් එවිට,

(a) $\tan^2\theta = \sin 2\theta$ සහ

(b) $\cos 2\theta = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $\theta = 36°$ නම්, එවිට $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ බව පෙන්වා $\cos 36° = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

(iii) ගණිත වගු භාවිතා නොකොට $\sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^4\frac{3\pi}{8}$ හි අගය සොයන්න.

---

(07) (i) $\sin 4\theta\cos 2\theta = \sin 5\theta\cos 3\theta$ සමීකරණය තෘප්ත කරන $\pi/2$ ට අඩු θ හි සියලු ධන අගයන් සොයන්න.

(ii) $5\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta - 3 = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් ලබා දෙන්න.

(iii) $-\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ සඳහා, $y = \cos x + \sin x$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

$\cos x + \sin x = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}x$ සමීකරණයේ එකම මූලය $x = \frac{\pi}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

---

(08) $\cos(A+B)$ සඳහා සූත්‍රය යොදා $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ බව පෙන්වන්න.
$\cos 2\theta\tan\theta + \sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.
$2\cos^2\theta - 2\cos^2 2\theta \equiv \cos 2\theta - \cos 4\theta$ සර්ව සාම්‍යය සාධනය කර

ඒ නයින්, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ බව අපෝහනය කර $\cos\frac{3\pi}{5}$ සඳහා අගයක් ලබා ගන්න.

---

(09) (i) $\tan(\theta + \alpha) - (3 + 2\sqrt{2})\tan\theta = 0$ නම්,

$\sin(2\theta + \alpha) = \sqrt{2}\sin\alpha$ බව පෙන්වන්න. θ සඳහා තාත්ත්වික විසඳුම් තිබීමට $\sin\alpha$ හි පරාසය ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින්, $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - (3 + 2\sqrt{2})\tan\theta = 0$ සමීකරණය සපුරාලන θ හි අගයන් සොයන්න.

(ii) A, B, C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම්, θ හි ඕනෑම අගයක් සඳහා $\tan A + \tan(B + \theta) + \tan(C - \theta) = \tan A\tan(B + \theta)\tan(C - \theta)$ බව සාධනය කරන්න.

---

(10) (i) $s = \sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta$ නම්, $2s = \frac{1 - \cos 8\theta}{\sin\theta}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $s = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් ලබාගන්න.

(ii) $\cos^4\theta + \sin^4\theta = a + b\sin^2 2\theta$ ආකාරයට වන පරිදි a හා b නියත සොයන්න.

එ මගින්, $2(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + 7\sin\theta\cos\theta = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

---

(11) (i) ඕනෑම x තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් සඳහා
$\sin^3 2x\cos 6x + \cos^3 2x\sin 6x = \frac{1}{4}\sin 8x$ බව පෙන්වන්න.

$\sin^3 2x\cos 6x + \cos^3 2x\sin 6x = a$ සමීකරණය විසඳිය හැකි a හි අගයන් අපෝහනය කරන්න.

(ii) ත්‍රිකෝණයක විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණයේ තරම මෙන් දෙගුණයක් ද දිගම පාදය කෙටිතම පාදයේ දිග මෙන් $1\frac{1}{2}$ ගුණයක් ද වේ. ත්‍රිකෝණයේ කුඩාතම කෝණය $\cos^{-1}(3/4)$ බව පෙන්වන්න. මධ්‍ය පාදයේ දිග $10\ cm$ බව දී ඇත්නම් අනෙක් පාද දෙකේ දිගවල් සොයන්න.

---

(12) $\tan 2\theta = \frac{2t}{1 - t^2}$ හා $\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $t = \tan\theta$ වේ.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

$\tan\theta = 2+\sqrt{3}$ වන 0 හා $\frac{\pi}{2}$ අතර θ කෝණය සොයන්න.

---

(13) $\text{cosec}\,\theta + \cot\theta = \cot\frac{\theta}{2}$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි θ හි අගය 0 හෝ π හි නිඛිල ගුණාකාරයක් හෝ නොවේ. ඒ නයින්,

(i) $\cot\frac{\pi}{8}$ හා $\cot\frac{\pi}{12}$ හි අගයන් ලබාගන්න.

(ii) $\text{cosec}\,\theta + \text{cosec}\,2\theta + \text{cosec}\,4\theta = \cot\frac{\theta}{2} - \cot 4\theta$ බව සාධනය කරන්න.

(iii) වගු භාවිතයෙන් තොරව,

$\text{cosec}\,\frac{4\pi}{15} + \text{cosec}\,\frac{8\pi}{12} + \text{cosec}\,\frac{16\pi}{15} + \text{cosec}\,\frac{32\pi}{15} = 0$ බව සාධනය කරන්න.

---

(14) $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan(A+B)$ බව සාධනය කරන්න.

A, B හා C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම්,
$\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \cot\dfrac{c}{2}$ බව ආපෝහනය කරන්න.

---

(15) සාධනය කරන්න.

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

(ii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$

(ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$

(iv) $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \text{cosec}^{-1}x$

(v) $\cos^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}x$

(vi) $\tan^{-1}\frac{1}{x} = \cot^{-1}x$

(vii) $\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(viii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(ix) $\sec^{-1}x + \text{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(x) $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(xi) $\sin^{-1}x = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

(xii) $\cos^{-1}x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(xiii) $\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

(xiv) $\cos^{-1}x = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

(xv) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

(xvi) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$

(xvii) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right]$

(xviii) $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right]$

(xix) $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\right]$

(xx) $\cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\right]$

(xxi) $\cot^{-1}\left(\dfrac{ab+1}{a-b}\right) + \cot^{-1}\left(\dfrac{bc+1}{b-c}\right) + \cot^{-1}\left(\dfrac{ca+1}{c-a}\right) = 0$

(xxii) $\sec^2(\tan^{-1} 2) + \mathrm{cosec}^2(\cot^{-1} 3) = 15$

(xxiii) $2\tan^{-1} x = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

(xxiv) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

(xxv) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

---

(16) සාධනය කරන්න.

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{7} + \tan^{-1}\dfrac{1}{13} = \tan^{-1}\dfrac{2}{9}$

(ii) $2\tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7} = \dfrac{\pi}{4}$

(iii) $2\tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7} + 2\tan^{-1}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

(iv) $\tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7} + \tan^{-1}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

(v) $3\tan^{-1}\dfrac{1}{4} + \tan^{-1}\dfrac{1}{20} + \tan^{-1}\dfrac{1}{1985} = \dfrac{\pi}{4}$

(vi) $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{70} + \tan^{-1}\dfrac{1}{99} = \dfrac{\pi}{4}$

(vii) $\tan^{-1}\dfrac{m}{n} - \tan^{-1}\dfrac{m-n}{m+n} = \dfrac{\pi}{4}$

(viii) $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17} = \sin^{-1}\frac{77}{85}$

(ix) $\sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{7}{25} = \cos^{-1}\frac{253}{325}$

(x) $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$

(xi) $\cos^{-1}\frac{63}{65} + 2\tan^{-1}\frac{1}{5} = \sin^{-1}\frac{3}{5}$

(xii) $\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$

(xiii) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{4}$

(xiv) $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{27}{11}$

(xv) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\frac{5}{13} = \frac{33}{65}$

---

(17) පහත සඳහන් ශ්‍රිත සරල කර දක්වන්න.

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$

(iv) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$

(v) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}\right)$

(vi) $\sin^{-1}(2x\sqrt{1 - x^2})$

(vii) $\sin^{-1}(3x - 4x^3)$

(viii) $\cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

(ix) $\tan^{-1}\left(\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$

(x) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$

(xi) $\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1 - y^2}{1 + y^2}\right)\right)$

(xii) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1 - \cos 3x}{1 + \cos 3x}}$

(xiii) $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}\right)$

(xiv) $\sin[\tan^{-1} x^2 + \cot^{-1} x^2]$

(xv) $\sin^{-1}[x\sqrt{1 - x} - \sqrt{x}\sqrt{1 - x^2}]$

(18) $\cos^{-1}\frac{x}{a} + \cos^{-1}\frac{y}{b} = \alpha$ නම්, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha$ බව පෙන්වන්න.

---

(19) $\tan^{-1} a + \tan^{-1} b + \tan^{-1} c = \pi$ නම්, $a + b + c = abc$ බව පෙන්වන්න.

---

(20) $\cos^{-1} a + \cos^{-1} b + \cos^{-1} c = \pi$ නම්, $a^2 + b^2 + c^2 + 2\,abc = 1$ බව පෙන්වන්න.

---

(21) පහත සඳහන් සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1} + \tan^{-1}\frac{x-1}{x} = \tan^{-1}(-7)$

(ii) $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$

(iii) $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan(2\operatorname{cosec} x)$

(iv) $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$

(v) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}\right) = \beta$

(vi) $\tan^{-1} x + 2\cot^{-1} x = \frac{2\pi}{3}$

(vii) $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} + \cot^{-1}\frac{1-x^2}{2x} = \frac{\pi}{3}, \quad x > 0$

(viii) $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\tan^{-1} x = 0, \quad x > 0$

(xi) $\cot^{-1} x - \cot^{-1}(x+2) = \frac{\pi}{12}$

(x) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{\pi}{3}$

(22) ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා පහත සඳහන් දෑ සාධනය කරන්න.

(i) $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

(ii) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

(iii) $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

(iv) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

(v) $a = b\cos C + c\cos B$

(vi) $b = c\cos A + a\cos C$

(vii) $c = a\cos B + b\cos A$

(viii) $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(ix) $\sin\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}}$

(x) $\sin\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

(xi) $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$

(xii) $\cos\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ac}}$

(xiii) $\cos\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ac}}$

(xiv) $\tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

(xv) $\tan\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-b)}}$

(xvi) $\tan\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

(xvii) $\sin A = \dfrac{2s}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(xviii) $\tan\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$

(xix) $\tan\dfrac{C-A}{2} = \dfrac{c-a}{c+a}\cot\dfrac{B}{2}$

(xx) $\tan\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{b+c}\cot\dfrac{C}{2}$

---

(23) ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා පහත සඳහන් දෑ සාධනය කරන්න.

(i) $a\cos\dfrac{B-C}{2} = (b+c)\sin\dfrac{A}{2}$

(ii) $\sin\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{(b-c)}{a}\cos\dfrac{A}{2}$

(iii) $b^2\sin 2c + c^2\sin 2B = 2bc\sin A$

(iv) $a\,(b\,\mathrm{co\ s}\,C - c\cos b) = b^2 - c^2$

(v) $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$

(vi) $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$

(vii) $a(\cos B + \cos C) = 2(b+c)\sin^2\dfrac{A}{2}$

(viii) $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \dfrac{b^2-c^2}{a^2}$

(ix) $a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$

(x) $a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$

(xi) $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{c - a\cos B}{b - a\cos C}$

(xii) $(a^2 - b^2 + c^2)\tan B = (a^2 + b^2 - c^2)\tan C$

---

(24) ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා පහත සඳහන් දෑ සාධනය කරන්න.

(i) $r = \dfrac{\Delta}{2}$

(ii) $r = (s-a)\tan\dfrac{A}{2} = (s-b)\tan\dfrac{B}{2} = (s-c)\tan\dfrac{C}{2}$

(iii) $2R = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

(iv) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C$

(v) $\sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{s}{R}$

(vi) $r = \dfrac{a\sin B/2\ \sin C/2}{\cos A/2}$

(vii) $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

(viii) $R = \dfrac{abc}{4\Delta}$

(ix) $\Delta = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

(x) $s = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

(xi) $\dfrac{1}{s-a} + \dfrac{1}{s-b} + \dfrac{1}{s-c} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{4R}{\Delta}$

(xii) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = \dfrac{1}{2Rr}$

(xiii) $\Delta = r^2\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$

(xiv) $\left(\dfrac{s}{a}-1\right)\left(\dfrac{s}{b}-1\right)\left(\dfrac{s}{c}-1\right) = \dfrac{r}{4R}$

(xv) $\dfrac{b^2-c^2}{2a} = R\sin(B-C)$

(xvi) $(a+b)\sec\dfrac{A-B}{2} = 4R\cos\dfrac{C}{2}$

(xvii) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$

(xviii) $a\cot A + b\cot B + c\cot C = 2(R+r)$

(xix) $\dfrac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A + \dfrac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B + \dfrac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = 0$

(xx) $a^3 \sin (B - C) + b^3 \sin (C - A) + c^3 \cos (A - B) = 0$

(xxi) $a^3 \sin (B - C) + b^3 \cos (C - A) + c^3 \cos (A - B) = 3\, abc$

---

(25) (i) $0 \leq x \leq 2\pi$ සඳහා $4 \sin^2 x + 12 \sin x \cos x - \cos^2 x + 5 = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(ii) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නියමය** හා **කෝසයින් නියමය** ප්‍රකාශ කරන්න.
$\dfrac{b + c}{2K - 1} = \dfrac{c + a}{K} = \dfrac{a + b}{2K + 1}$ බව දී ඇත**.** මෙහි k යනු 2 ට වඩා වැඩි එහෙත් 4 ට සමාන නොවන දෙන ලද නිඛිලයක් ද, a, b, c යනු ABC ත්‍රිකෝණයක, සුපුරුදු අංකනයෙන් පාද ද වේ.

$\dfrac{\sin A}{K + 1} = \dfrac{\sin B}{K} = \dfrac{\sin C}{K - 1}$ බව පෙන්වන්න.

K ඇසුරෙන් $\cos A$ ද ලබා ගෙන
$\dfrac{\cos A}{(K - 4)(K + 1)} = \dfrac{\cos B}{K^2 + 2} = \dfrac{\cos C}{(K + 4)(K - 1)}$ බව පෙන්වන්න.
මෙහි A, B, C ට සුපුරුදු තේරුම් ඇත.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2000)

---

(26) (i) ඕනෑම x තාත්වික සංඛ්‍යාවක් සඳහා
$\sin^3 2x \cos 6x + \cos^3 2x \sin 6x = \dfrac{3}{4} \sin 8x$ බව පෙන්වන්න.
$\sin^3 2x \cos 6x + \cos^3 2x \sin 6x = a$ සමීකරණය විසඳිය හැකි a අගයයන් අපෝහනය කරන්න.

(ii) ත්‍රිකෝණයක විශාලතම කෝණය කුඩාතම කෝණයේ තරම මෙන් දෙගුණයක් ද, දිගම පාදය කෙටිතම පාදයේ දිග මෙන් 1 ½ ගුණයක් ද වේ. ත්‍රිකෝණයේ කුඩාතම කෝණය $\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

මධ්‍ය පාදයේ දිග $10\ cm$ බව දී ඇත්නම්, අනෙක් පාද දෙකේ දිගවල් සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2001)

(27) ABC යනු, $b > c$ පරිදි වූ ත්‍රිකෝණයකි. D සහ E යනු, A හරහා මධ්‍යස්ථය AD වන පරිදි ද, AD, AE මඟින් A කෝණය ත්‍රිච්ඡේද කරන පරිදි ද BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ. සුදුසු ලෙස තෝරා ගනු ලැබූ ත්‍රිකෝණ දෙකකට සයින් නියමය යෙදීමෙන්, $\cos\frac{A}{3} = \frac{b}{2c}$ බව සාධනය කරන්න.

$DE : EB = 1 : k$ නම්, $\cos\frac{A}{3}$ රාශිය $\frac{(2+k)\,c}{2\,kb}$ ට ද සමාන බව පෙන්වන්න.

$k = 1$ නම් $A = 90°$ බව ද $k = 2$ නම් $A = 135°$ බව ද අපෝහනය කරන්න. එක් එක් අවස්ථාවේ දී, a ඇසුරෙන් b සහ c නිර්ණය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2002)

---

(28) (*a*) θ යනු $\pi/2$ හි ගුණාකාරයකට සමාන නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් විට, $x = \sin\theta - \cos\theta$ සහ $y = \tan\theta + \cot\theta$ නම්, $\sin 2\theta$
(i) x ඇසුරෙන් පමණක්, (ii) y ඇසුරෙන් පමණක් ලබා ගන්න.
ඒ නයින් x සහ y අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබාගන්න.

(*b*) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = (1 + 2\cos 2x)\sin 4x$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, $\sin x\,(\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x) = \sin 3x \sin 4x$ බව පෙන්වන්න.
$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(*c*) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නියමය** ප්‍රකාශ කරන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a = b + \lambda c$ වේ. මෙහි $\lambda \in IR$
$\lambda\cos\frac{C}{2} = \cos\left(B + \frac{C}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2003)

---

(29) (*a*) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ නම්, එවිට $\sin\theta\tan\theta > 2\,(1 - \cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\sin(A - B)$ හා $\cos(A - B)$ හි ප්‍රසාරණ උපයෝගී කර ගනිමින්
$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ හා $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ බව පෙන්වන්න.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $\tan x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ බව පෙන්වා,

$\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්
$\dfrac{a^2 - b^2}{c^2} = \dfrac{\sin (A - B)}{\sin (A + B)}$ බව සාධනය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2004)

---

(30) (a) (i) සෑම θ සඳහා ම,
$8 \cos^4 \theta - 4 \cos^3 \theta - 8 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta + 1 = \cos 4\theta - \cos 3\theta$ බවත්,

(ii) 7θ යන්න 2π හි නිඛිලමය ගුණාකාරයක් නම්, $\cos 4\theta = \cos 3\theta$ බවත්, පෙන්වන්න.
$\cos \dfrac{2\pi}{7} + \cos \dfrac{4\pi}{7} + \cos \dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නිතීය** ප්‍රකාශ කරන්න.
O යනු $O\hat{A}B = O\hat{B}C = O\hat{C}A = \theta$ වන පරිදි ABC ත්‍රිකෝණයක් තුළ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු.
OBC හා OAB ත්‍රිකෝණවලට සයින් නිතීය භාවිත කරමින්, සම්මත අංකනයෙන්, $OB = \dfrac{a \sin (C - \theta)}{\sin C} = \dfrac{C \sin \theta}{\sin B}$ බව සාධනය කර,
$\cot \theta = \cot A + \cot B + \cot C$ බව අපෝහනය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2005)

---

(31) (a) (i) $\sin 3\theta = \cos 2\theta$ සමීකරණය විසඳීමෙන් $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\dfrac{\pi}{4} = 2 \tan^{-1} \dfrac{1}{3} + \tan^{-1} \dfrac{1}{7}$ සහ $\tan^{-1} \dfrac{1}{3} = \tan^{-1} \dfrac{1}{7} + \tan^{-1} \dfrac{2}{11}$ බව පෙන්වන්න.
$\dfrac{\pi}{4} = 2 \tan^{-1} \dfrac{2}{11} + 3 \tan^{-1} \dfrac{1}{7}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර, **කෝසයින නීතිය** අපෝහනය කරන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\dfrac{b + c}{5} = \dfrac{c + a}{6} = \dfrac{a + b}{7}$ බව දී ඇත.
(i) $\dfrac{\sin A}{4} = \dfrac{\sin B}{3} = \dfrac{\sin C}{2}$ (ii) $\dfrac{\cos A}{-1} = \dfrac{4 \cos B}{11} = \dfrac{2 \cos C}{7}$
බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2006)

(32) (a) සුපුරුදු අංකනයෙන්, **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.

P යනු $<PAB = <PBC = <PCA = \phi$ වන අයුරින් ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත වූ ලක්ෂ්‍යයකි.
ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය, සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$\frac{abc}{2}\left[\frac{BP}{bc} + \frac{CP}{ac} + \frac{AP}{ab}\right] \sin\phi$ බව සාධනය කරන්න.

$\frac{1}{\sin^2\phi} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) (i) $2\tan^{-1}\left[\frac{1}{5}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{5}{12}\right]$, (ii) $2\tan^{-1}\left[\frac{5}{12}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{120}{119}\right]$,

(iii) $\tan^{-1}\left[\frac{120}{119}\right] - \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left[\frac{1}{239}\right]$, බව පෙන්වන්න.

$4\tan^{-1}\left[\frac{1}{5}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{1}{239}\right] = \frac{\pi}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2007)

---

(33) (a) **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර, සාධනය කරන්න.

P යනු $P\hat{A}B = P\hat{B}C = P\hat{C}A = \phi$ වන අයුරින් ABC ත්‍රිකෝණය ඇතුළත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. සුපුරුදු අංකනයෙන්
$\frac{bc}{a}(\cot\phi - \cot A) = \frac{ac}{b}(\cot\phi - \cot B) = \frac{ab}{c}(\cot\phi - \cot C)$ බව
සාධනය කරන්න.

(b) x, y හා z යනු $x + y + z = \pi$, $\cos x + \cos y = 1$ සහ $t = \sin x + \sin y$ වන පරිදි වූ සෘණ නොවන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා තුනක් යැයි ගනිමු.

(i) $\tan^{-1}(t) = \frac{x+y}{2}$, (ii) $0 \le t \le \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, t එහි උපරිම අගය ගන්නා විට x, y හා z හි අගයන් සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2008)

(34) (*a*) සුපුරුදු අංකනයෙන් **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර, සාධනය කරන්න.

A, B හා C ලක්ෂ්‍ය තුනක්, ආරෝහණ පිළිවෙළට, තිරසට θ කෝණයකින් ආනත වූ සරල රේඛාවක් මත පිහිටයි. $AB = x$ වන අතර, D යනු C සිට h උසකින් සිරස්ව ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය වේ. CD මගින්, A සහ B හි දී පිළිවෙළින් α සහ β කෝණ ආපාතනය කෙරෙයි.

(i) $h = \dfrac{x \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)\cos\theta}$ (ii) $d = \dfrac{x \sin(\alpha + \theta)\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$

බව සාධනය කරන්න; මෙහි d යනු A හි මට්ටමේ සිට D හි උස වේ.

(*b*) (i) $\sin\theta - \cos\theta = 1$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුමත්,

(ii) $\tan^{-1} 1/2 - \tan^{-1} 1/3 = \sin^{-1} x$ සමීකරණය සපුරාලන x හි අගයත් සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2009)

---

(35) (*a*) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, **කෝසයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර, සාධනය කරන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

(i) $2\left[\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c}\right] = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$ බව,

(ii) $\dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{3}{a+b+c}$ නම් එවිට C කෝණය $\dfrac{\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$ යන්න $R\cos(\theta - \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි R හා α තාත්ත්වික වේ.

ඒ නයින්, $\sqrt{3}\cos^2\theta + (1 - \sqrt{3})\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta - \cos\theta + \sin\theta = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(*c*) $-1 \le x \le 1$ සඳහා $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2010)

---

(36) (*a*) $\cos^2\theta \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය යොදාගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,
$\cos^6\theta + \sin^6\theta = a + b\cos 4\theta$ වන අයුරින් a හා b යන තාත්ත්වික නියත නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,

(i) $y = 8(\cos^6 x + \sin^6 x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(ii) $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4x$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(*b*) $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2011:නව)

---

(37) (*a*) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශකර සාධනය කරන්න.

$-1 < k < 1$ යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a - b = kc$ නම්

(i) $\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) = k\cos\left(\frac{C}{2}\right)$,

(ii) $\frac{k\sin A}{1 - k\cos B} = \frac{a}{b}\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$ බව සාධනය කරන්න.

(*b*) $\sqrt{3}(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$ සමීකරණ විසඳුම් සොයන්න.

(*c*) x සඳහා විසඳන්න; $\tan^{-1} x + \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\pi}{2}.$

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2011:පැරණි)

---

(38) (*a*) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ බව සාධනය කරන්න.

$a = (b-c)\cos\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B-C}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) θ හි ඕනෑම තාත්ත්වික අගයක් සඳහා $\tan\theta - 2\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ ප්‍රකාශනයට -7 හා 1 අතර කිසිම අගයක් ගත නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(*c*) $5\cos^2\theta + 18\cos\theta\sin\theta + 29\sin^2\theta$ යන්න, $a + b\cos(2\theta + \alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි a හා b යනු නියත වන අතර α යනු θ වලින් ස්වායත්ත කෝණයක් වෙයි.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ,
$8(\cos x + \sin x)^2 + 2(\cos x + 5\sin x)^2 = 19$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2012:නව)

---

(39) (*a*) *ABC* ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, **කෝසයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

(i) $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c)}{2abc}$,

(ii) $\dfrac{1}{a}\cos^2\dfrac{A}{2} + \dfrac{1}{b}\cos^2\dfrac{B}{2} + \dfrac{1}{c}\cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{(a + b + c)^2}{2abc}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) $\sin 2\theta - 2\sin\theta - \cos\theta + 1 = 0$ හි සාධාරණ විසඳුම්, රේඩියනවලින් සොයන්න.

(*c*) $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right), \beta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$ හා $\gamma = \tan^{-1}\left(\dfrac{2}{9}\right)$ නම්,

$0 < \alpha + \beta + \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $\alpha + \beta + \gamma < \dfrac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2012:පැරණි)

---

(40) (*a*) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha + \beta + \gamma)$
$\equiv 4\cos\dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\dfrac{1}{2}(\beta + \gamma)\sin\dfrac{1}{2}(\gamma + \alpha)$ සර්වසාම්‍ය සාධනය කරන්න.

(*b*) $f(x) = 2\sin^2\dfrac{x}{2} + 2\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + 4\cos^2\dfrac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $a\sin(x + \theta) + b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $a\,(> 0)$, b හා $\theta\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$1 \le f(x) \le 5$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$-\dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{11\pi}{6}$ සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*c*) $p > 2q > 0$ යැයි ගනිමු.

ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA හා AB පාදවල දිග පිළිවෙළින් $p + q, p$ හා $q - p$ වේ.
$\sin A - 2\sin B + \sin C = 0$ බව පෙන්වා $\cos\dfrac{A - C}{2} = 2\cos\dfrac{A + C}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2013)

---

(41) (*a*) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $f(x) = \dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $A\cos(2x + \alpha) + B$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $A\ (> 0), B$ හා $\alpha\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ඒ නයින්, $f(x) = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$ යන සමීකරණය විසඳන්න.

$f(x)$ සඳහා දෙන ලද මුල් ප්‍රකාශනය යොදා ගනිමින් $f(x) = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$ යන්න $2\tan^2 x + 4k\tan x - k^2 = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $k = 2 - \sqrt{2}$ වේ.

$\tan\dfrac{\pi}{24} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

තවද $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $y = 2f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.

ABC යනු ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a : b : c = 1 : \lambda : \mu$ බව දී ඇත; මෙහි λ හා μ යනු නියත වේ.
$\mu^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4\lambda\sin^3 C$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2014)

---

(42) (*a*) $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha\cos\beta = 1$ බව පෙන්වන්න.

(b) $f(x) = \cos 2x + \sin 2x + 2(\cos x + \sin x) + 1$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $k(1 + \cos x)\sin(x + \alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න;
මෙහි k හා α යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$g(x)$ යන්න $\dfrac{f(x)}{1 + \cos x} = \sqrt{2}\,\{g(x) - 1\}$ වන ලෙස ගනිමු;
මෙහි $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$y = g(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ **එනයින්,** ඉහත දී ඇති පරාසය තුළ $f(x) = 0$ සමීකරණයට එක විසඳුමක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(c) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,
$a(b - c)\operatorname{cosec}\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{A}{2} = (b + c)^2 \tan\left(\dfrac{B - C}{2}\right)\sec\left(\dfrac{B - C}{2}\right)$ බව
පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ.-2015)

---

(43) (a) $\tan\alpha$ හා $\tan\beta$ ඇසුරෙන් $\tan(\alpha + \beta)$ සඳහා වූ ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍යය ලියා දක්වන්න.

ඒනයින්, $\tan\theta$ ඇසුරෙන් $\tan 2\theta$ ලබා ගෙන, $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$
බව පෙන්වන්න.

අවසාන සමීකරණයෙහි $\theta = \dfrac{5\pi}{12}$ ආදේශ කිරීමෙන්, $\tan\dfrac{5\pi}{12}$ යන්න
$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ හි විසඳුමක් බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x + 1)(x^2 - 4x + 1)$ බව තවදුරටත් දී ඇති විට,

$\tan\dfrac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $0 < A < \pi$ සඳහා $\tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$ බව පෙන්වන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින නීතිය භාවිත කර, $(a + b + c)(b + c - a)\tan^2\dfrac{A}{2} = (a + b - c)(a + c - b)$ බව
පෙන්වන්න.

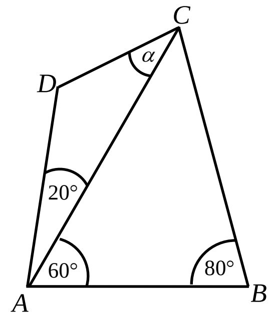
(c) $\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{13}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{56}{65}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ.-2016)

(44) (*a*) (i) $0° < \theta < 90°$ සඳහා $\frac{2\cos(60° - \theta) - \cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) රූපයේ පෙන්වා ඇති $ABCD$ චතුරස්‍රයෙහි $AB = AD, A\hat{B}C = 80°$, $C\hat{A}D = 20°$ හා $B\hat{A}C = 60°$ වේ. $A\hat{C}D = \alpha$ යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\frac{AC}{AB} = 2\cos 40°$ බව පෙන්වන්න.

මීළඟට ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $\frac{AC}{AD} = \frac{\sin(20° + \alpha)}{\sin\alpha}$ බව පෙන්වන්න.



$\sin(20° + \alpha) = 2\cos 40° \sin\alpha$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින්, $\cot\alpha = \frac{2\cos 40° - \cos 20°}{\sin 20°}$ බව පෙන්වන්න.

දැන්, ඉහත (i) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = 30°$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$ සමීකරණය විසඳන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ.-2017)

---

(45) (*a*) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$ විසඳන්න.

$\cos\theta$ ඇසුරෙන් $\cos 2\theta$ හා $\cos 3\theta$ ලියා දක්වා,

$\cos 2\theta + \cos 3\theta = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ බව පෙන්වන්න;

මෙහි $t = \cos\theta$ වේ.

ඒ නයින්, $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල තුන ලියා දක්වා $4t^2 - 2t - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූල $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D යනු $BD : DC = m : n$ වන පරිදි BC මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු: මෙහි $m, n > 0$ වේ. $B\hat{A}D = \alpha$ හා $D\hat{A}C = \beta$ බව දී ඇත. BAD හා DAC ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්,

$\frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $b = AC$ හා $c = AB$ වේ.

ඒ නයින්, $\frac{mb - nc}{mb + nc} = \tan\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ.-2018)

---

(46) (*a*) $\sin A$, $\cos A$, $\sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A+B)$ ලියා දක්වා, $\sin(A-B)$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ හා
$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin 7\theta$ විසඳන්න.

(*b*) *ABC* ත්‍රිකෝණයක $BD = DC$ හා $AD = BC$ වන පරිදි *D* ලක්ෂ්‍යය *AC* මත පිහිටා ඇත. $B\hat{A}C = \alpha$ හා $A\hat{C}B = \beta$ යැයි ගනිමු. සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන්, $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + 2\beta)$ බව පෙන්වන්න.

$\alpha : \beta = 3 : 2$ නම්, ඉහත (*a*) හි අවසාන ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $2\tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \frac{\pi}{2}$ විසඳන්න.

ඒ නයින්, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$ බව පෙන්වන්න.

(අ.පො.ස.උ.පෙ. – 2019: නව සහ පැරණි)

✦✦✦

Manoj Solangaarachchi
(B. Sc.)